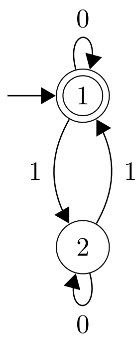
Etude de l'automate minimal des écritures en base 2^p des multiples de l'ensemble de Thue-Morse

Adeline Massuir

30 mai 2018

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Emilie Charlier et Célia Cisternino.

L'ensemble de Thue-Morse, $\mathscr{T}$, est l'ensemble des nombres naturels dont l'écriture en base 2 contient un nombre pair de 1. Les premiers éléments sont $0, 3, 5, 6, 9, \ldots$ Cet ensemble est clairement 2-reconnaissable. En effet, l'automate suivant accepte les représentations en base 2 de ces nombres :



De plus, on peut facilement, à partir de cet automate, décrire l'automate qui accepte les représentations de ces nombres dans une base qui est une puissance de 2. Enfin, $\mathscr{T}$ n'étant clairement pas ultimement périodique, on sait par le théorème de Cobham qu'il ne peut être b-reconnaissable pour un b qui n'est pas une puissance (entière positive) de 2.

Nous nous sommes donc intéressées à l'automate minimal de chacun des langages

$$\operatorname{rep}_b(m\mathscr{T})$$

où $b = 2^p$ (avec $p > 0$) et $m \in \mathbb{N}_0$.

Pour ce faire, nous avons commencé par construire un automate qui acceptait ce langage. Plusieurs étapes sont nécessaires. Tout d'abord, on construit un automate qui accepte les couples $(\operatorname{rep}_b(n), \operatorname{rep}_b(mn))$ pour tous les naturels n (en prenant pour convention qu'on ajoute des 0 de tête au plus court des deux mots afin que les deux composantes aient la même longueur). Ensuite, on construit l'automate acceptant le langage

$$\{(\operatorname{rep}_b(t), \operatorname{rep}_b(n)) : t \in \mathscr{T}, n \in \mathbb{N}\}$$

(avec la même convention que précédemment). Ensuite, on effectue le produit des deux automates, pour obtenir un automate acceptant le langage suivant (toujours avec la même convention) :

$$\{(\operatorname{rep}_b(t), \operatorname{rep}_b(mt)) : t \in \mathscr{T}\}$$

Finalement, il nous reste à projeter le label de chaque arc sur sa deuxième composante.

A partir de cet automate, nous avons pu prouver que, si on note $b = 2^p$ et $m = k2^i$ où $p > 0$, k impair et $i \geq 0$, alors le nombre d'états de l'automate minimal du langage

$$\operatorname{rep}_b(m\mathscr{T})$$

est $2k + \lceil \frac{i}{p} \rceil$.

Ce travail fait écho à l'article de B. Alexeev [1], dans lequel il détermine le nombre d'états de l'automate minimal de chaque langage $\mathrm{rep}_b\,(m\,\mathbb{N})$ pour tous $m, b \in \mathbb{N}_0$. Toutefois, nos procédés de démonstration sont différents des siens.

1. Boris Alexeev, *Minimal DFA for testing divisibility*, Journal of Computer and System Sciences **69** (2004), 2, pp. 235–243.