UN ENSEMBLE INFINI DÉCIDABLE DE POINTS FIXES SANS CUBE ADDITIF

DAMIE JAMET, FLORIAN LIETARD, AND THOMAS STOLL

Résumé. Dans ce travail, nous exhibons une classe infinie de points fixes de morphismes pour lesquels le problème d'évitabilité des cubes additifs est décidable. Pour cela, nous étendons l'algorithme proposé par Cassaigne *et al.* [1] à l'ensemble des morphismes semblables (au sens des matrices d'incidence) au morphisme étudié dans leur article. Comme dans l'article de Cassaigne *et al.*, la preuve est en partie informatique : autrement dit, elle nécessite une étude exhaustive, par ordinateur, d'un grand nombre de cas.

Le premières études sur les problèmes d'évitement remontent aux travaux de A. Thue [2, 3]. On sait ainsi qu'il existe un mot infini sans carré sur un alphabet de trois lettres (un *carré* est un mot fini de la forme w_1w_2 où $w_1 = w_2$).

Dans [4], F.M. Dekking montre qu'il est existe un mot infini sur 3 lettres sans cube abélien (un mot fini w_1w_2 sur l'alphabet Σ est un *carré abélien* si w_1 et w_2 sont de même longueur et si w_1 est l'image de w_2 par une permutation de Σ). Dans [5], V. Keränen a montré l'existence d'un mot infini sur 4 lettres sans carré abélien.

Dans [1], Cassaigne *et al.* montrent que le point fixe $w_0 = \lim_{n\to\infty} \varphi_0^n(0) = 031430\ldots$ du morphisme $\varphi_0 : 0 \mapsto 03$, $1 \mapsto 43$, $3 \mapsto 1, 4 \mapsto 01$ est sans cube additif : un *cube additif* est un mot fini sur $\Sigma \subset \mathbb{N}$ de la forme $w_1w_2w_3$ où w_1, w_2 et w_3 sont trois mots finis de même longueur et :

$$\sum_{i_1 \in w_1} i_1 = \sum_{i_2 \in w_2} i_2 = \sum_{i_3 \in w_3} i_3.$$

Dans notre exposé nous montrerons dans un premier temps que l'algorithme proposé dans [1] s'étend de manière naturelle à l'ensemble des morphismes semblables (au sens des matrices d'incidence) au morphisme φ_0. En particulier, nous exhibons ainsi une classe potentiellement infinie (à un facteur multiplicatif et à une translation des lettres près sur l'alphabet) de points fixes sur 4 lettres sans cube additif.

Bien que les morphismes considérés soient semblables deux à deux, il est intéressant de constater que leurs points fixes ne possèdent pas tous les mêmes propriétés additives. Par exemple, soit $w_1 = \lim_{n\to\infty} \varphi_1^n(6) = 602106\ldots$ le point fixe du morphisme $\varphi_1 : 0 \mapsto 2$, $1 \mapsto 62$, $2 \mapsto 10, 6 \mapsto$

60 semblable au morphisme φ_0. Le mot infini w_1 est l'image du mot infini w_0 par la transformation de $\{0, 1, 3, 4\}$ dans $\{0, 1, 2, 6\}$ comme suit : $0 \mapsto 6$, $3 \mapsto 0$, $1 \mapsto 2$, $4 \mapsto 1$. Notre implémentation de l'algorithme de Cassaigne *et al.* [1] nous donne une preuve informatique du fait que w_1 est sans cube additif. Cependant, alors que nous conjecturons que tous les carrés additifs dans w_0 sont des carrés abéliens, nous remarquons que le mot w_1 possède des carrés additifs propres, autrement dit, non abéliens, comme par exemple

$$w_1 = 6\,0\,2\,1\,0\,6\,2\,2\,6\,0\,1\,0\,1\,\underline{0\,6\,0\,2\,6}\,\underline{2\,2\,6\,2\,2}\,6\,0\,2\cdots$$

Cette partie sera consacrée à une étude numérique détaillée de ce phénomène.

Nous terminerons notre exposé par une présentation des pistes envisagées pour nous attaquer aux problèmes ouverts suivants :

(1) Existe-t-il un mot infini sur l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ sans cubes additifs ?
(2) Quel est le plus petit morphisme sur 3 lettres dont le point fixe ne possède pas de cubes additifs ?
(3) Existe-t-il un mot infini sur un alphabet fini sans carrés additifs ?

Références

[1] J. Cassaigne, J. D. Currie, L. Schaeffer, and J. Shallit. *Avoiding Three Consecutive Blocks of the Same Size and Same Sum. J. ACM*, 61, 2, Article 10, 2014.

[2] A. Thue. *Über unendliche Zeichenreihen*. Skrifter udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania : Mathematisk-naturvidenskabelig Klasse. 1906.

[3] A. Thue. *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen*. J. Dybwad, 1912.

[4] F.M Dekking. Strongly non-repetitive sequences and progression-free sets. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 27(2) :181 – 185, 1979.

[5] V. Keränen. *Abelian squares are avoidable on 4 letters*, pages 41–52. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1992.

E-mail address: damien.jamet@loria.fr
E-mail address: florian.lietard@loria.fr
E-mail address: thomas.stoll@univ-lorraine.fr

Loria – UMR 7503, Campus Scientifique, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy

Loria – UMR 7503, Campus Scientifique, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy – Institut Élie Cartan de Lorraine – UMR 7502, Université de Lorraine, Site de Nancy, B.P. 70239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex

Institut Élie Cartan de Lorraine – UMR 7502, Université de Lorraine, Site de Nancy, B.P. 70239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex

1. voir https://members.loria.fr/FLietard/publications/