Séries $\mathbb{Q}$-Hadamard et $\mathbb{Q}$-automates circulaires

Louis-Marie Dando [*] et Sylvain Lombardy [*]

On étudie ici les séries formelles sur un monoïde libre A^* finiment engendré avec coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce cadre, les séries rationnelles et les séries reconnaissables coïncident et le *produit d'Hadamard* (ou produit terme à terme, noté $\odot$) de deux séries rationnelles est rationnel [8].

On considère deux opérations naturelles liées au produit d'Hadamard. Soient s et t deux séries formelles dans $\mathbb{K}\langle\langle A^*\rangle\rangle$.

— si pour tout w dans A^*, $\langle t, w\rangle \neq 0$, alors le quotient d'Hadamard de s et t est défini par :

$$\odot\frac{s}{t} = \sum_{w\in A^*} \frac{\langle s, w\rangle}{\langle t, w\rangle} w;$$

— si pour tout w dans A^*, $\langle s, w\rangle^* = \sum_{k\geqslant 0}\langle s, w\rangle^k$ existe, alors l'itération d'Hadamard de s est défini par :

$$s^{\circledast} = \sum_{w\in A^*} \langle s, w\rangle^* w.$$

Proposition 1 *L'ensemble des séries $\mathbb{K}$-rationnelles n'est clos ni par quotient d'Hadamard (cf. [7]), ni par itération d'Hadamard.*

On définit donc l'ensemble des séries d'Hadamard comme la plus petite famille de séries contenant les séries rationnelles et close pour ces opérations.

Théorème 2 *L'ensemble des séries $\mathbb{K}$-Hadamard sur A^* est définie de manière équivalente comme*
a) l'ensemble des quotients d'Hadamard de séries $\mathbb{K}$-rationnelles ;
b) la clôture des séries $\mathbb{K}$-rationnelles par somme, produit d'Hadamard et itération d'Hadamard.

Remarquons que l'ensemble des séries $\mathbb{K}$-Hadamard n'est pas clos pour les opérations rationnelles (il n'est même pas clos par produit de Cauchy).

On considère par ailleurs des *automates circulaires* à multiplicité dans un corps. Comme un automate pondéré classique, lors de tout calcul, un tel automate lit son entrée de gauche à droite en calculant une valeur comme produit des valeurs associées aux transitions empruntées ; mais en plus, arrivé à la fin de son entrée l'automate peut soit stopper s'il se trouve dans un état final, soit emprunter une transition spéciale qui replace la tête de lecture au début du mot. La valeur associée à un mot est la somme (potentiellement infinie) des valeurs

[*]LaBRI UMR 5800, Université de Bordeaux, INP Bordeaux, CNRS, Bordeaux, FRANCE

des calculs acceptant ce mot. Si tout mot a une valeur bien définie, l'automate est dit *valide* et son *comportement* est la série dans laquelle le coefficient de chaque mot est la valeur calculée par l'automate.

Ce modèle naturel d'automate – souvent considéré comme une restriction des automates bi-directionnels [3, 5] – permet, dans le cas non pondéré, de reconnaître l'intersection de deux langages avec une machine qui compte un nombre linéaire d'états par rapport aux automates d'entrée et, dans le cas pondéré, de réaliser avec la même complexité le produit d'Hadamard de deux séries (même dans le cas de poids non commutatifs).

Comme on ne peut pas décider si la série réalisée par un $\mathbb{Q}$-automate probabiliste a tous ses coefficients strictement inférieurs à 1/2 [4], si la série réalisée par un $\mathbb{Q}$-automate a tous ses coefficients strictement inférieurs à 1, en faisant boucler un tel automate, on ne peut pas décider si l'automate circulaire obtenu est valide.

Proposition 3 *Il n'est pas décidable si un $\mathbb{Q}$-automate circulaire est valide.*

Ceci est à mettre en lien avec le fait qu'on ne peut pas décider si le support d'une série $\mathbb{Q}$-rationnelle est A^* tout entier ; on ne peut donc pas décider si l'inverse d'Hadamard d'une telle série est défini.

Par contre, si les séries sont bien définies, on a l'équivalence suivante.

Théorème 4 *L'ensemble des séries réalisables par des $\mathbb{K}$-automates circulaires valides est exactement l'ensemble des séries $\mathbb{K}$-Hadamard.*

Corollaire 5 *L'équivalence des $\mathbb{Q}$-automates circulaires valides est décidable.*

De fait, le comportement s de tout $\mathbb{Q}$-automate circulaire peut être représenté par une paire de $\mathbb{Q}$-automates classiques réalisant des séries t_1 et t_2 telles que $s = \odot\frac{t_1}{t_2}$. Savoir si deux comportements $s = \odot\frac{t_1}{t_2}$ et $s' = \odot\frac{t'_1}{t'_2}$ sont égaux revient alors à savoir si $t_1 \odot t'_2$ et $t'_1 \odot t_2$, qui sont des séries $\mathbb{Q}$-rationnelles, sont égales. Or, l'équivalence des séries $\mathbb{Q}$-rationnelles est décidable [1].

Comme nous l'avons dit plus haut, les automates circulaires peuvent être vus comme restriction des automates bi-directionnels (ou boustrophédons) ; ces derniers sont donc au moins aussi puissants. Dans le cas non pondéré, tous ces modèles sont équivalents aux automates classiques [9, 6], alors que dans les cas pondérés les automates bi-directionnels peuvent être strictement plus puissants que les automates circulaires, eux-mêmes plus puissants que les automates classiques (voir par exemple [2] pour le cas des transducteurs, équivalents à des automates sur le semi-anneau $\mathrm{Rat}B^*$).

De manière assez surprenante, dans le cas des corps, les automates bi-directionnels ne sont pas plus puissants que les automates circulaires.

Théorème 6 *Toute série réalisée par un $\mathbb{K}$-automate bi-directionnel peut être réalisée par un $\mathbb{K}$-automate circulaire.*

Références

[1] J. Berstel and C. Reutenauer. *Noncommutative Rational Series with Applications*, volume 137 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2010.

[2] B. Guillon. Sweeping weakens two-way transducers even with a unary output alphabet. In *NCMA'15*, volume 318 of *books@ocg.at*, pages 91–108. Austrian Comp. Soc., 2015.

[3] C. Kapoutsis, R. Královič, and T. Mömke. Size complexity of rotating and sweeping automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 78(2) :537–558, 2012.

[4] A. Paz. *Introduction to Probabilistic Automata (Computer Science and Applied Mathematics)*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1971.

[5] G. Pighizzini. Two-way finite automata : Old and recent results. *Fundam. Inform.*, 126(2-3) :225–246, 2013.

[6] M. O. Rabin and D. Scott. Finite automata and their decision problems. *IBM J. Res. Dev.*, 3(2) :114–125, 1959.

[7] C. Reutenauer. Sur les éléments inversibles de l'algèbre de Hadamard des séries rationnelles. *Bull. Soc. Math. France*, 110 :225–232, 1982.

[8] M.-P. Schützenberger. On a theorem of R. Jungen. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13(6) :885–890, 1962.

[9] J. C. Shepherdson. The reduction of two-way automata to one-way automata. *IBM J. Res. Dev.*, 3(2) :198–200, 1959.